放物型Bergman空間上のコンパクトToeplitz作用素 (再生核の応用についての研究)

鈴木, 紀明; 西尾, 昌治; 山田, 雅博

数理解析研究所講究録
第1618巻 2008年 64-72

放物型 Bergman 空間上のコンパクト Toeplitz 作用素

鈴木紀明 (Noriaki Suzuki)
(Department of Mathematics, Meijo University)
西尾昌治 (Masaharu Nishio)
(Department of Mathematics, Osaka City University)
山田雅博 (Masahiro Yamada)
(Department of Mathematics, Gifu University)

§1. 序

数年前から放物型 Bergman 空間の解析を行っているが，本稿ではこの空間に作用するコンパクトな Toeplitz 作用素の分類問題を考察する (詳細は [9] を参照).

まず，放物型 Bergman 空間の定義から始める．$H := \mathbf{R}^n \times (0, \infty)$ を上半空間とし，$0 < \alpha \leq 1$ とする．H 上で α-放物型作用素

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$$

を考える．ここで，$\Delta_x := \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ は $\mathbf{R}^n$ の Laplace 作用素である．なお，H の点を $X = (x, t)$ と書く．また，V を $(n+1)$-次元の Lebesgue 測度とし，$L^2(V)$ で H 上の V に関する2乗可積分な関数全体を表す．

本稿で取り扱う放物型 Bergman 空間 $(\boldsymbol{b}_\alpha^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は次の $L^2(V)$ の部分空間である：

$$\boldsymbol{b}_\alpha^2 := \{u \in C(H) \cap L^2(V); L^{(\alpha)}u = 0 \quad (\text{超関数の意味で})\}.$$

放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ は逆 Fourier 変換を用いると

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \tag{1.1}$$

となる．Hilbert 空間 $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ の再生核 R_α は基本解を使って次のように表される．

$$R_\alpha(x,t;y,s) = -2\partial_s W^{(\alpha)}(x-y, t+s). \tag{1.2}$$

次の重み付き測度

$$dV^*(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} dV(X)$$

が以後の解析で重要な役割を演ずる．V^* は α-放物型拡大 $\Phi_X : (y,s) \to (t^{\frac{1}{2\alpha}}y + x, ts)$ に関しての不変測度である．すなわち，任意の非負関数 f と任意の $X \in H$ について

$$\int f(Y)dV^*(Y) = \int f(\Phi_X(Y))dV^*(Y)$$

である．さらに

$$\|R_\alpha^X\|_{L^2(V)}^2 \, dV(X) = R_\alpha(X,X)dV(X) = R_\alpha(X_0,X_0)dV^*(X)$$

も成り立つ．ここで $R_\alpha^X = R_\alpha(X,\cdot)$ および $X_0 = (0,1) \in H$ である．

上半空間 H 上の非負値な Radon 測度 μ をシンボルとする Toeplitz 作用素 T_μ を以下で定める．

$$(T_\mu u)(X) := \int R_\alpha(X,Y)\, u(Y)\, d\mu(Y).$$

Toeplitz 作用素の解析では次の平均関数 $\hat{\mu}^{(\alpha)}$ と Berezin 変換 $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ が役に立つ (例えば [1], [5], [6], [7] を参照).

定義 1. Radon 測度 $\mu \geq 0$ と H 上の点 $Y = (y,s) = (y_1, \cdots, y_n, s)$ に対して，

$$\hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \mu(Q^{(\alpha)}(Y))\Big/V(Q^{(\alpha)}(Y)),$$
$$\tilde{\mu}^{(\alpha)}(Y) := \int R_\alpha(X,Y)^2 d\mu(X)\Big/\int R_\alpha(X,Y)^2 dV(X)$$

とおく．ここで $Q^{(\alpha)}(Y)$ は α-放物型 Carleson box 呼ばれ，

$$Q^{(\alpha)}(Y) := \{(x_1, \cdots, x_n, t);\ s \leq t \leq 2s, |x_j - y_j| \leq 2^{-1}s^{1/2\alpha} j = 1, \cdots, n\}.$$

である．

さて，$\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を Young 関数とする．すなわち，$[0,\infty)$ 上の凸な単調増加関数で，$\psi(0) = 0$ と $\lim_{s\to\infty}\psi(s) = \infty$ をみたすとする．この ψ に関する Orlicz 空間を $L^\psi(V^*)$ とする．すなわち，

$$L^\psi(V^*) := \{f; H \text{ 上の Borel 可測 }, \|f\|_{L^\psi(V^*)} < \infty\}$$

である．ここで

$$\|f\|_{L^\psi(V^*)} := \inf\{\tau > 0; \int \psi(\frac{|f|}{\tau})\, dV^* \leq 1\}$$

である．$\psi(t) = t^p$ $(p \geq 1)$ のときは，通常の Lebesgue 空間 $L^p(V^*)$ と一致している．

我々の最初の定理は次である．

定理 1. μ を H 上の非負 Radon 測度とする．もし，$\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\psi}(V^*)$ ならば Toeplitz 作用素 $T_\mu : \boldsymbol{b}^2_\alpha \to \boldsymbol{b}^2_\alpha$ はコンパクトである．

この定理の逆はどうなるか，すなわち，Toeplitz 作用素 T_μ がどのようなときに $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\psi}(V^*)$ となるか？次がこの問題に対する一つの答である．

定理 2. $\mu \geq 0$ を H 上の非負 Radon 測度で，ある $\delta \in \boldsymbol{R}$ について

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^{-\delta}\, d\mu(x,t) < \infty \tag{1.3}$$

を満たしているとする．このとき，T_μ が Schatten ψ-族に属する必要かつ十分条件は $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\psi}(V^*)$ である．

次の節で Schatten ψ-族の定義を与えるとともに，この作用素全体の作る空間についての基本的な性質を述べる．3 節では平均作用素について触れる．4 節と 5 節で，定理 1 および定理 2 の証明の概略を与える．なお (1.3) は Toeplitz 作用素が $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ 上で定義できるための条件で (いまのところ) 落とすことはできない．

§2. Schatten 族のコンパクト作用素

Hilbert 空間上の Schatten ψ-族の作用素についてまとめる．この節では $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は単に単調増加関数で $\psi(0) = 0$, $\lim_{s\to\infty} \psi(s) = \infty$ をみたすものとする．このとき

$$\psi(t+s) \leq a\big(\psi(b\,t) + \psi(b\,s)\big) \tag{2.1}$$

をみたす正数 $a, b > 0$ を考える．ψ が単調増加なので, 例えば $a = b = 2$ とすれば (2.1) は常にみたされるが，a をできるだけ小さくとることが望ましい．ψ が Young 関数ならば凸性から $a = 1/2$ とできる．

定義 2. $\mathcal{H}$ を (可分な)Hilbert 空間とする．線形なコンパクト作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が Schatten ψ-族に属するとは T の特異値からなる数列 $(\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$ が Orlicz 型数列空間 l^{ψ} に属するときを言う．ここで T の特異値とは T の絶対値 $|T| := \sqrt{T^*T}$ の固有値のことである．なお，$(\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$ は減少列となるように並べることとし，その際に重複度も考慮する．

固有値と特異値の関係に少し触れる．コンパクト作用素 T の固有値を重複度を込めて絶対値が減少するように並べたものを $(\mu_j)_{j=0}^{\infty}$ とする．このときすべての非負整数 m について

$$\sum_{j=0}^{m} |\mu_j| \leq \sum_{j=0}^{m} \lambda_j$$

が成り立つ ([3, p.1093]).

さて，$\mathcal{H}$ 上の Shatten ψ-族に属するコンパクト作用素の全体を $\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ とする．すなわち，$T \in \mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ であるとは，ある正数 τ が存在して

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi(\frac{\lambda_j}{\tau}) < \infty$$

をみたす場合である．このとき次の量を考える．

$$\|T\|_{\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})} := \inf\{\tau > 0; \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\frac{\lambda_j}{\tau}) \leq 1\}$$

および，$r > 0$ に対して

$$\|T\|_{r,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})} := \inf\{\tau > 0; \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\frac{\lambda_j}{\tau}) \leq r\}.$$

もし ψ が Young 関数ならば，任意の $r > 0$ に対しての $\|\cdot\|_{r,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})}$ と $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})}$ は互いに定数倍で押さえ合うことが出来る．

さて，$\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素 T の j 番目 $(j \geq 0)$ の特異値を $\lambda_j(T)$ と書くことにする．次の Min-Max 原理は基本的な役割を演ずる．

補題 1. ([3, Lemma 2 in §9 of XI]) 各 $j \geq 0$ に対して，次が成り立つ：

$$\lambda_j(T) = \min_{\substack{H_0 \subset \mathcal{H}:\text{部分空間} \\ \dim H_0 \leq j}} \max_{u \in H_0^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \max_{\substack{H_0 \subset \mathcal{H}:\text{部分空間} \\ \dim H_0 \geq j+1}} \min_{u \in H_0 \setminus \{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}.$$

この Min-Max 原理から以下が従う．

(i) $\lambda_{j+k}(T_1 + T_2) \leq \lambda_j(T_1) + \lambda_k(T_2)$,

(ii) $\lambda_0(T) = \|T\|$,

(iii) $|\lambda_j(T_1) - \lambda_j(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\|$,

(iv) $\lambda_j(AT) \leq \lambda_j(T)\|A\|$,

(v) $\lambda_j(TA) \leq \lambda_j(T)\|A\|$,

ここで T_1, T_2, T はコンパクト作用素，A は有界線形作用素である．以上の事実を用いて，$\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ についての基本的性質が導かれる．

命題 1. ([3, pp.1088–1095]) (1) $\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ は線形空間である．

(2) $\|T_1 + T_2\|_{4ar,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})} \leq b\left(\|T_1\|_{r,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})} + \|T_2\|_{r,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})}\right)$ が成り立つ．ここで，a と b は (2.1) の定数である．

(3) $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体からなる環を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ とする．$\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．

(4) $\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ は次の意味で完備である．$(T_k)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ 内の列で，すべての $r > 0$ に対して $\lim_{k,\ell \to \infty} \|T_k - T_\ell\|_{r,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})} = 0$ をみたすならば，すべての $r > 0$ に対して $\lim_{k \to \infty} \|T_k - T\|_{r,\mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})} = 0$ をみたす $T \in \mathcal{S}^{\psi}(\mathcal{H})$ が存在する．

§3. 平均作用素

μ を上半空間 H 上の非負 Radon 測度とし，ψ は $[0,\infty)$ 上の Young 関数とする．H 上の非負関数 φ に対して，平均作用素 $\mathcal{I}_\varphi$ を以下で定める．

$$\mathcal{I}_\varphi\mu(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}\int \varphi(X^{-1}\cdot Y)d\mu(Y).$$

ここで，$X=(x,t), Y=(y,s)\in H$, $X\cdot Y=\Phi_X(Y)=(t^{\frac{1}{2\alpha}}y+x, ts)$ そして $X^{-1}=(-t^{-\frac{1}{2\alpha}}x, t^{-1})$ である ([8], [9])．このとき，H 上の関数 $f\geq 0$ に対して，

$$\mathcal{I}_\varphi f(X)=\int f(X\cdot Y)\varphi(Y)dV(Y)$$

および，二つの非負値関数 φ_1 と φ_2 に対して

$$\mathcal{I}_{\varphi_1}\mathcal{I}_{\varphi_2}\mu(X)=\mathcal{I}_{\varphi_1*\varphi_2}\mu(X)$$

が成り立つ．ここで，

$$\varphi_1*\varphi_2(X) := \int \varphi_1(Y)\varphi_2(Y^{-1}\cdot X)dV^*(Y).$$

である．次に非負の整数 m に対して

$$R_\alpha^m(X,Y) := \big((-2)^m/m!\big)s^m\partial_s^m R_\alpha(X,Y)$$

を考える．$0<p<\infty$ と $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が $-1<\lambda<\frac{n}{2\alpha}(p-1)+pm$ をみたすとき，μ の重み付き Berezin 変換を次で定義する．

$$B_{m,p,\lambda}\mu(X) := \frac{\int |R_\alpha^m(Y,X)|^p s^\lambda d\mu(Y)}{\int |R_\alpha^m(Y,X)|^p s^\lambda dV(Y).}$$

この $B_{m,p,\lambda}\mu$ と $\hat{\mu}^{(\alpha)}$ はともに平均作用素として表される：

$$b_{m,p,\lambda}(X)=t^\lambda|R_\alpha^m(X,X_0)|^p \quad \text{および} \quad \rho(X)=\chi_{Q(X_0)}(X)\ (\text{定義関数})$$

とすると

$$B_{m,p,\lambda}\mu=\mathcal{I}_{b_{m,p,\lambda}}\mu \quad \text{および} \quad \hat{\mu}^{(\alpha)}=\mathcal{I}_\rho\mu$$

となる．これらが同一の範疇で考察できることにより，次の重要な結果が示される (これは [9] の主定理である)．

補題 2. μ に依存しない定数 $C>0$ が存在して

$$C^{-1}\|B_{m,p,\lambda}\mu\|_{L^\psi(V^*)}\leq\|\hat{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\psi(V^*)}\leq C\|B_{m,p,\lambda}\mu\|_{L^\psi(V^*)}$$

が成り立つ．特に，$\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\psi}(V^*)$ である必要かつ十分条件は $\tilde{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\psi}(V^*)$ である．

§4. 定理 1 の証明の概略

この節でも μ は H 上の非負 Radon 測度とし，ψ は $[0,\infty)$ 上の Young 関数とする．T_μ のコンパクト性については次が知られている．

補題 3. ([7, Theorem 1]) 平均関数 $\hat{\mu}^{(\alpha)}$ が $\lim_{X\to\mathcal{A}} \hat{\mu}^{(\alpha)}(X) = 0$ をみたせば Toeplitz 作用素 T_μ はコンパクトである．ここで $\mathcal{A}$ は H の 1 点コンパクト化の無限遠点である．

なお，$\hat{\mu}^{(\alpha)}$ の有界性が T_μ の有界性に対応している．いずれの場合も (1.3) が成り立てばこれらは必要条件でもある．

V^* が α-放物型拡大 について不変である事実から次が分かる．

補題 4. φ はコンパクトな台をもつ H 上の連続関数とし，$f \in L^{\psi}(V^*)$ とする．このとき

$$\lim_{X\to\mathcal{A}} \mathcal{I}_\varphi f(X) = 0.$$

さて，前出の $\rho(X) = \chi_{Q(X_0)}(X)$ に対して，定数 $C > 0$ が存在して

$$\mathcal{I}_\varphi \hat{\mu}^{(\alpha)} = \mathcal{I}_\varphi \mathcal{I}_\rho \mu = \mathcal{I}_{\varphi*\rho}\mu \geq C\mathcal{I}_\rho \mu = C\hat{\mu}^{(\alpha)}$$

となる．これより定理 1 が補題 3, 4 から導かれる．

§5. 定理 2 の証明の概略

この節も $\mu \geq 0$ は H 上の Radon 測度で (1.3) をみたすものとし，ψ は $[0,\infty)$ 上の Young 関数とする．$\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^{\psi}(V^*)$ または $T_\mu \in \mathcal{S}^{\psi}(\boldsymbol{b}_\alpha^2)$ を仮定する．このとき，T_μ は正定値自己共役なコンパクト作用素であるから特異値 $(\lambda)_{j=0}^{\infty}$ は固有値と一致している．よって $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ の完全正規直交系 $(e_j)_{j=0}^{\infty}$ で $T_\mu e_j = \lambda_j e_j$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ をみたすものがとれる．

定理 2 は以下の補題 5, 6 と補題 2 から従う．

補題 5. m を非負整数とし，$-1 < \lambda < m$ とする．このとき μ に依存しない定数 $C > 0$ が存在して

$$\|T_\mu\|_{\mathcal{S}^{\psi}(\boldsymbol{b}_\alpha^2)} \leq C \|B_{m,1,\lambda}\mu\|_{L^{\psi}(V^*)}$$

が成り立つ．

[証明の概略] 補題 2 より $\|B_{m,1,\lambda}\mu\|_{L^\psi(V^*)} < \infty$ ならば $\hat{\mu}^{(\alpha)} \in L^\psi(V^*)$ なので，上記の完全正規直交系 $(e_j)_{j=0}^\infty$ がとれる．このとき，

$$\lambda_j = \lambda_j(T_\mu) = \langle T_\mu e_j, e_j\rangle = \int |e_j(X)|^2 d\mu(X)$$

かつ $e_j(X) = \int R_\alpha^m(X,Y)e_j(Y)dV(Y)$ より，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\lambda_j \le C \int B_{m,1,\lambda}\mu(Y)|e_j(Y)|^2 dV(Y)$$

となる．τ を $\int \psi\Big(\frac{B_{m,1,\lambda}\mu(Y)}{\tau}\Big)\, dV^*(Y) \le 1$ をみたす任意の正数とすると，Jensen の不等式から

$$\psi\Big(\frac{\lambda_j}{s_0\tau C}\Big) \le \int \psi\Big(\frac{B_{m,1,\lambda}\mu(Y)}{s_0\tau}\Big)|e_j(Y)|^2 dV(Y)$$

がわかる．ただし $s_0 := \max\{1, R_\alpha(X_0,X_0)\}$ である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^\infty \psi\Big(\frac{\lambda_j}{s_0\tau C}\Big) &\le \int \psi\Big(\frac{B_{m,1,\lambda}\mu(Y)}{s_0\tau}\Big)R_\alpha(Y,Y)\, dV(Y)\\ &\le \int \psi\Big(\frac{B_{m,1,\lambda}\mu(Y)}{\tau}\Big)\, dV^*(Y) \le 1\end{aligned}$$

となり，$\|T_\mu\|_{S^\psi(\boldsymbol{b}_\alpha^2)} \le s_0 C\|B_{m,1,\lambda}\mu\|_{L^\psi(V^*)}$ が導かれる．

補題 6. 測度 μ に依存しない定数 $C > 0$ が存在して

$$\|\tilde{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\psi(V^*)} \le C\|T_\mu\|_{S^\psi(\boldsymbol{b}_\alpha^2)}$$

が成り立つ．

[証明の概略] $T_\mu \in S^\psi(\boldsymbol{b}_\alpha^2)$ を仮定する．先ほどと同様に $\sum_{j=0}^\infty \psi(\lambda_j/\tau) \le 1$ をみたす $\tau > 0$ を任意にとる．スペクトル写像定理により，$u \in \boldsymbol{b}_\alpha^2$ のとき

$$\psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)u = \sum_{k=0}^\infty \psi\Big(\frac{\lambda_k}{\tau}\Big)\langle u, e_k\rangle e_k$$

であり，$r_\alpha^X := R_\alpha^X/\|R_\alpha^X\|_{L^2(V)}$ とすると，

$$\langle e_j(X)e_j, \psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)R_\alpha^X\rangle = \langle e_j(X)e_j, \sum_{k=0}^\infty \psi\Big(\frac{\lambda_k}{\tau}\Big)e_k(X)e_k\rangle = \psi\Big(\frac{\lambda_j}{\tau}\Big)|e_j(X)|^2$$

および $\psi(\lambda_j/\tau) = \int\langle e_j(X)e_j, \psi(T_\mu/\tau)R_\alpha^X\rangle dV(X)$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^\infty \psi\Big(\frac{\lambda_j}{\tau}\Big) &= \int \sum_{j=0}^\infty \langle e_j(X)e_j, \psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)R_\alpha^X\rangle dV(X) = \int \langle R_\alpha^X, \psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)R_\alpha^X\rangle dV(X)\\ &= \int \langle r_\alpha^X, \psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)r_\alpha^X\rangle \|R_\alpha^X\|_{L^2(V)}^2 dV(X)\end{aligned}$$

である．また

$$\tilde{\mu}^{(\alpha)}(X)=\frac{\int R_\alpha(X,Y)^2\,d\mu(Y)}{\int R_\alpha(X,Y)^2\,dV(Y)}=\frac{\langle T_\mu R_\alpha^X, R_\alpha^X\rangle}{\|R_\alpha^X\|_{L^2(V)}^2}=\langle r_\alpha^X, T_\mu r_\alpha^X\rangle$$

であるから，Jensen の不等式から

$$\psi\Big(\frac{\tilde{\mu}^{(\alpha)}(X)}{\tau}\Big)=\psi\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_j}{\tau}\langle r_\alpha^X, e_j\rangle^2\Big)\le\sum_{j=0}^{\infty}\psi\Big(\frac{\lambda_j}{\tau}\Big)\langle r_\alpha^X, e_j\rangle^2=\langle r_\alpha^X, \psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)r_\alpha^X\rangle$$

となる．よって $s_1:=\min\{1,R_\alpha(X_0,X_0)\}$ とすると，

$$\begin{aligned}\int\psi\Big(s_1\frac{\tilde{\mu}^{(\alpha)}(X)}{\tau}\Big)dV^*(X)&\le\int s_1\,\psi\Big(\frac{\tilde{\mu}^{(\alpha)}(X)}{\tau}\Big)dV^*(X)\\&\le\int\psi\Big(\frac{\tilde{\mu}^{(\alpha)}(X)}{\tau}\Big)\|R_\alpha^X\|_{L^2(V)}^2dV(X)\\&\le\int\langle r_\alpha^X,\psi\Big(\frac{T_\mu}{\tau}\Big)r_\alpha^X\rangle\|R_\alpha^X\|_{L^2(V)}^2dV(X)\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\psi\Big(\frac{\lambda_j}{\tau}\Big)\le 1\end{aligned}$$

となり，$\|\tilde{\mu}^{(\alpha)}\|_{L^\psi(V^*)}\le\frac{1}{s_1}\|T_\mu\|_{S^\psi(b_\alpha^2)}$ が示される．

参考文献

[1] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces, Potential Analysis, 17 (2002), 307–335.

[2] B. R. Choe, H. Koo and Y. J. Lee, Positive Schatten(-Herz) class Toeplitz operators on the half-space, Potential Analysis, 27 (2007), 73–100.

[3] N, Dunford and J. Schwartz, Linear operators, Part II, Interscience,1963.

[4] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[5] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, Hokkaido Math. J. 36, No. 3 (2007), 563–583.

[6] 鈴木紀明，西尾昌治，山田雅博, 放物型 Bergman 空間上の Toeplitz 作用素，数理解析研究所講究 1553 (2007), 181-195

[7] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Hiroshima Math. J., 38 (2008), 177–192.

[8] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Parabolic dilations with application to Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Proceedings of the 15th ICFIDCAA, 307-312, OKAMI Studies Vol. 2, Osaka Municipal Universities Press, 2008.

[9] M. Nishio, N.Suzuki and M. Yamada, Weighted Berezin transformations with application to Toeplitz operators of Schatten class on parabolic Bergman spaces, preprint.